Cadeau bonux

Laurent Lyaudet

10 mai 2008

Résumé

Cette note est une digression autour d'une question de Frédéric Mazoit rédigée lors d'un week-end de 5 jours à la campagne privé d'internet.[1]

La question qui sert de point de départ à cette note est la suivante : « Étant donnée une famille de parties d'un ensemble, stable par union, intersection et complémentaire, peut-on la définir comme le niveau 0 d'une fonction sous-modulaire ? ».

Notons E cet ensemble, $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble des parties de E, P cette famille de parties et f cette hypothétique fonction sous-modulaire. Avant de commencer, rappelons tout de même qu'une fonction $f : \mathcal{P}(E) \rightarrow G$, où $(G, +)$ est un groupe abélien muni d'un ordre total, est dite modulaire si $f(X) + f(Y) = f(X \cup Y) + f(X \cap Y)$, pour toutes parties X et Y de E. Elle est dite sous-modulaire si $f(X) + f(Y) \geq f(X \cup Y) + f(X \cap Y)$, pour toutes parties X et Y de E. Malgré cette provocation inutile, nous ne considérerons dans la suite que des fonctions à valeurs réelles et E un ensemble fini. Les fonctions constantes étant modulaires et la somme de deux fonctions (sous)-modulaires étant elle-même (sous)-modulaire, on s'intéressera sans perte de généralité aux fonctions à valeurs réelles positives ou nulles.

On remarque immédiatement que la condition être stable par union et intersection est nécessaire. En effet, si $X, Y \in P$, alors $f(X) + f(Y) \geq f(X \cup Y) + f(X \cap Y)$ impose $0 \geq f(X \cup Y) + f(X \cap Y) \Leftrightarrow f(X \cup Y) = 0$ et $f(X \cap Y) = 0$. L'objet de cette note va être de montrer que cette condition est suffisante après maints détours inutiles dont seul l'auteur a le secret.

Attaquons tout de suite avec un cas trivial. Prenons une famille $\mathcal{P}$ réduite à une partie X de E (si, si c'est stable par union et intersection). On obtient immédiatement la famille d'inégalités :

$$f(Y) \geq f(X \cup Y) + f(X \cap Y), \forall Y \neq X.$$

Toute personne munie d'un peu de bon sens aura remarqué que $X \cup Y$ et $X \cap Y$ sont plus « corrélés » avec X que ne l'est Y, ou plutôt, dans le sens qui nous intéresse, que Y est plus « décorrélé » de X que ne le sont $X \cup Y$ et $X \cap Y$. Il suffit donc de trouver une fonction f qui traduit cette « décorrélation »de manière adéquate.

[1]Le style pédant qui va suivre est voulu.

Le premier candidat intuitif, si l'on a fait un peu de théorie des ensembles, est la différence symétrique de $A, B \in \mathcal{P}(E)$, notée $A\Delta B$. Rappelons que $A\Delta B = (A \cup B)\backslash(A \cap B) = (A\backslash B) \cup (B\backslash A)$.

Ô miracle ! Si on pose $f(Y) = |Y\Delta X|$, on obtient une fonction modulaire qui s'annule uniquement en X. D'accord je n'ai pas prouvé que f est modulaire mais tout le monde le sait, non ? Bon, s'il faut vraiment une preuve, je peux en donner deux selon la définition de différence symétrique choisie : une en montrant que $f_1(Y) = |Y \cup X|$ et $f_2(Y) = |Y \cap X|$ sont modulaires et en constatant que $f(Y) = f_1(Y) - f_2(Y)$ (cf. $A\Delta B = (A \cup B)\backslash(A \cap B)$), une en montrant que $f_3(Y) = |Y\backslash X|$ et $f_4(Y) = |X\backslash Y|$ sont modulaires et en constatant que $f(Y) = f_3(Y) + f_4(Y)$ (cf. $A\Delta B = (A\backslash B) \cup (B\backslash A)$).

Lemme 1 *Les fonctions*
- $f_1(Y) = |Y \cup X|$,
- $f_2(Y) = |Y \cap X|$,
- $f_3(Y) = |Y\backslash X|$,
- $f_4(Y) = |X\backslash Y|$ *et*
- $f_\Delta(Y) = |Y\Delta X|$

de $\mathcal{P}(E)$ *dans* $\mathbb{N}$ *sont modulaires* $\forall X \in \mathcal{P}(E)$.

Preuve :

Soit X l'ensemble choisi dans la définition de la fonction et Y, Z deux autres ensembles quelconques. J'invite tout lecteur aussi peu familier de ces questions que moi à aider son intuition à l'aide du diagramme d'Euler suivant.

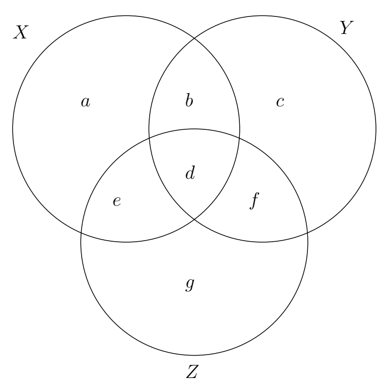

FIG. 1 – diagramme d'Euler

$$
\begin{array}{rcl}
f_1(Y)+f_1(Z) & = & |Y\cup X|+|Z\cup X| \\
 & = & |Y|+|X|-|Y\cap X|+|Z|+|X|-|Z\cap X| \\
 & = & |Y|+|Z|+|X|-|Y\cap X|-|Z\cap X|+|X| \\
 & = & |Y|+|Z|+|X|-|Y\cap X|-|Z\cap X|-|Y\cap Z|+|X\cap Y\cap Z| \\
 & & +|Y\cap Z|-|X\cap Y\cap Z|+|X| \\
 & = & |(Y\cup Z)\cup X|+|(Y\cap Z)\cup X| \\
 & = & f_1(Y\cup Z)+f_1(Y\cap Z). \\
f_2(Y)+f_2(Z) & = & |Y\cap X|+|Z\cap X| \\
 & = & |(Y\cap X)\backslash Z|+|Y\cap X\cap Z|+|(Z\cap X)\backslash Y|+|Z\cap X\cap Y| \\
 & = & |(Y\cup Z)\cap X|+|(Y\cap Z)\cap X| \\
 & = & f_2(Y\cup Z)+f_2(Y\cap Z). \\
f_3(Y)+f_3(Z) & = & |Y\backslash X|+|Z\backslash X| \\
 & = & |(Y\backslash X)\backslash Z|+|(Y\backslash X)\cap Z|+|(Z\backslash X)\backslash Y|+|(Z\backslash X)\cap Y| \\
 & = & |(Y\backslash Z)\backslash X|+|(Z\backslash Y)\backslash X|+|(Y\cap Z)\backslash X|+|(Y\cap Z)\backslash X| \\
 & = & |(Y\cup Z)\backslash X|+|(Y\cap Z)\backslash X| \\
 & = & f_3(Y\cup Z)+f_3(Y\cap Z). \\
f_4(Y)+f_4(Z) & = & |X\backslash Y|+|X\backslash Z| \\
 & = & |(X\backslash Y)\backslash Z|+|(X\backslash Y)\cap Z|+|(X\backslash Z)\backslash Y|+|(X\backslash Z)\cap Y| \\
 & = & |X\backslash(Y\cup Z)|+|(X\backslash Y)\cap Z|+|(X\backslash(Z\cup Y)|+|(X\backslash Z)\cap Y| \\
 & = & |X\backslash(Y\cup Z)|+|X\backslash(Y\cap Z)| \\
 & = & f_4(Y\cup Z)+f_4(Y\cap Z).
\end{array}
$$

C.Q.F.D.

■

On a donc réussi à construire une fonction modulaire qui s'annule uniquement sur l'ensemble de la famille P. Pour généraliser à une famille close par intersection et union arbitraire, on a bien entendu envie de prendre le minimum de fonctions similaires définies avec les différents éléments de la partie. On pourrait donc essayer de montrer que le minimum de deux fonctions (sous)-modulaires est aussi (sous)-modulaire ; sauf que ça n'a aucune chance de réussir car on montrerait alors que toute famille de parties peut être définie comme le zéro d'une fonction (sous)-modulaire et nous savons qu'être clos par union et intersection est nécessaire.

Remarquons tout de même qu'il existe des fonctions modulaires dont le minimum est sous-modulaire : le lecteur pourra s'exercer à montrer que c'est le cas de f_3 et f_4 après une fastidieuse mais néanmoins facile preuve (il y aussi les fonctions constantes mais c'est moins drôle). Un contre-exemple simple est fourni par deux instanciations de f_3 pour des ensembles X, X' disjoints : soient $g(Y)=|Y\backslash\{e_1\}|$, $g'(Y)=|Y\backslash\{e_2\}|$ et $f(Y)=\min(g(Y),g'(Y))$; prenons Y et Z disjoints tels que $e_1\in Y$ et $e_2\in Z$; clairement, $f(Y)+f(Z)=|Y|-1+|Z|-1<|Y|+|Z|-1+0=f(Y\cup Z)+f(Y\cap Z)$.

Nous allons donc démontrer la proposition suivante.

Proposition 1 *Soit $P=\{X_1,\ldots,X_k\}\subseteq\mathcal{P}(E)$ une famille de parties de E. La fonction $f(Y)=\min(|Y\Delta X_1|,\ldots,|Y\Delta X_k|)$ est sous-modulaire si et seulement si P est close par union et intersection.*

Preuve :

Nous avons déjà vu que si f est sous-modulaire alors nécessairement P est close par union et intersection.

Réciproquement, supposons que P est close par union et intersection. Soient $A, B \subseteq E$ et $1 \leq i, j \leq k$ tels que $f(A) = |A \Delta X_i|$ et $f(B) = |B \Delta X_j|$. Comme P est close par union et intersection, $f(A \cup B) \leq |(A \cup B)\Delta(X_i \cup X_j)|$ et $f(A \cap B) \leq |(A \cap B)\Delta(X_i \cap X_j)|$. Il suffit donc de montrer que $|A\Delta X_i| + |B\Delta X_j| \geq |(A \cup B)\Delta(X_i \cup X_j)| + |(A \cap B)\Delta(X_i \cap X_j)|$. Il est grand temps de faire un nouveau diagramme.

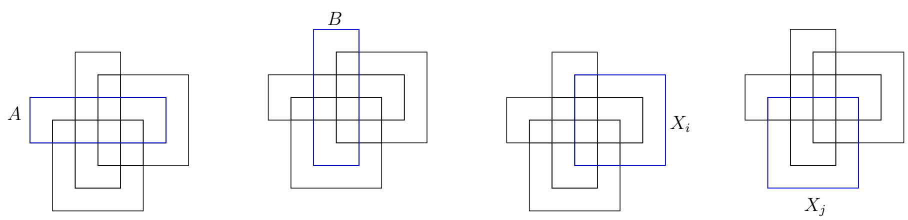

Fig. 2 – A, B, X_i, X_j

Commençons par faire une preuve visuelle avant de l'écrire formellement :

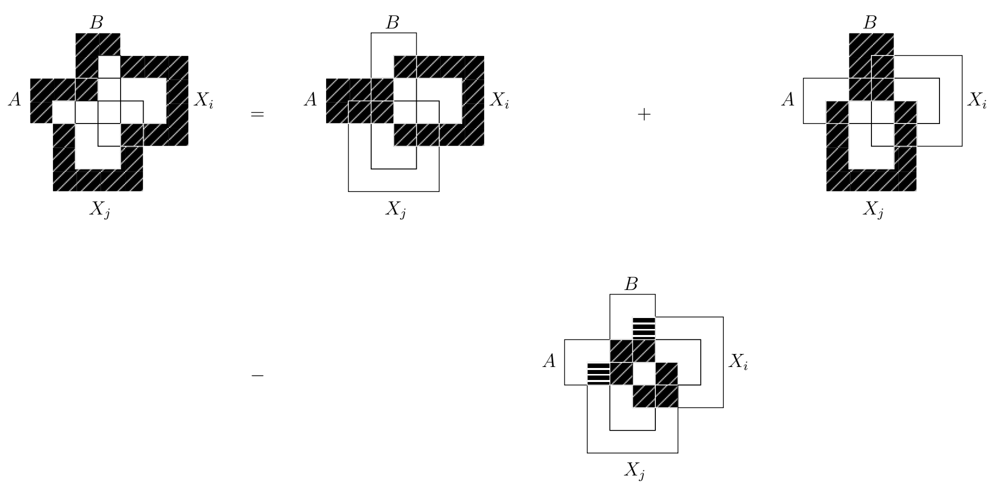

Fig. 3 – $|(A \cup B)\Delta(X_i \cup X_j)| = |A\Delta X_i| + |B\Delta X_j| - |Z| - 2 \cdot |U|$

où $U = ((A \cap X_j)\backslash(B \cup X_i)) \cup ((B \cap X_i)\backslash(A \cup X_j))$.

Or

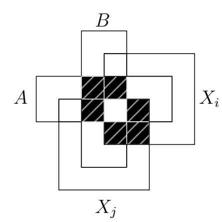

FIG. 4 – $|Z| = |(A \cap B)\Delta(X_i \cap X_j)|$

donc $|A\Delta X_i| + |B\Delta X_j| \geq |(A \cup B)\Delta(X_i \cup X_j)| + |(A \cap B)\Delta(X_i \cap X_j)|$.

Bien que cette preuve soit à mes yeux aussi exacte et formelle qu'une preuve écrite, nous allons tout de même en rédiger une version moche et absconse...

$$\begin{array}{rcl} f(A) + f(B) & = & |A\Delta X_i| + |B\Delta X_j| \\ & = & \ldots \\ & = & \ldots \\ & = & \ldots \\ & = & |(A \cup B)\Delta(X_i \cup X_j)| + |(A \cap B)\Delta(X_i \cap X_j)| \\ & & +2 \cdot |((A \cap X_j)\backslash(B \cup X_i)) \cup ((B \cap X_i)\backslash(A \cup X_j))| \\ & \geq & |(A \cup B)\Delta(X_i \cup X_j)| + |(A \cap B)\Delta(X_i \cap X_j)| \\ & \geq & f(A \cup B) + f(A \cap B). \end{array}$$

Comment ça je n'ai pas rédigé la preuve ? Le symbole $\ldots$ a pourtant un sens mathématique non ambigu : « Démerde-toi cher lecteur ! ». De toute manière, vous ne l'auriez pas lu cette preuve, si ? Bon d'accord, c'est bien parce que vous insistez. Rendez-vous page suivante.

$$
\begin{aligned}
f(A)+f(B) &= |A\Delta X_i|+|B\Delta X_j| \\
&= |A\backslash X_i|+|X_i\backslash A|+|B\backslash X_j|+|X_j\backslash B| \\
&= |(A\backslash X_i)\backslash X_j|+|(A\backslash X_i)\cap X_j|+|(X_i\backslash A)\backslash B|+|(X_i\backslash A)\cap B| \\
&\quad +|(B\backslash X_j)\backslash X_i|+|(B\backslash X_j)\cap X_i|+|(X_j\backslash B)\backslash A|+|(X_j\backslash B)\cap A| \\
&= |(A\backslash X_i)\backslash X_j|+|(B\backslash X_j)\backslash X_i|+|(X_i\backslash A)\backslash B|+|(X_j\backslash B)\backslash A| \\
&\quad +|(A\backslash X_i)\cap X_j|+|(X_i\backslash A)\cap B|+|(B\backslash X_j)\cap X_i|+|(X_j\backslash B)\cap A| \\
&= |(A\cup B)\backslash(X_i\cup X_j)|+|(A\cap B)\backslash(X_i\cup X_j)|+|(X_i\cup X_j)\backslash(A\cup B)|+|(X_i\cap X_j)\backslash(A\cup B)| \\
&\quad +|(A\cap X_j)\backslash X_i|+|(X_i\cap B)\backslash A|+|(B\cap X_i)\backslash X_j|+|(X_j\cap A)\backslash B| \\
&= |(A\cup B)\Delta(X_i\cup X_j)|+|(A\cap B)\backslash(X_i\cup X_j)|+|(X_i\cap X_j)\backslash(A\cup B)| \\
&\quad +|((A\cap X_j)\backslash X_i)\backslash B|+|((A\cap X_j)\backslash X_i)\cap B|+|((X_i\cap B)\backslash A)\backslash X_j|+|((X_i\cap B)\backslash A)\cap X_j| \\
&\quad +|((B\cap X_i)\backslash X_j)\backslash A|+|((B\cap X_i)\backslash X_j)\cap A|+|((X_j\cap A)\backslash B)\backslash X_i|+|((X_j\cap A)\backslash B)\cap X_i| \\
&= |(A\cup B)\Delta(X_i\cup X_j)|+|(A\cap B)\backslash(X_i\cup X_j)|+|(A\cap B\cap X_j)\backslash X_i|+|(B\cap A\cap X_i)\backslash X_j| \\
&\quad +|(X_i\cap X_j)\backslash(A\cup B)|+|(X_i\cap X_j\cap B)\backslash A|+|(X_j\cap X_i\cap A)\backslash B| \\
&\quad +2\cdot|((A\cap X_j)\backslash(B\cup X_i)|+2\cdot|((X_i\cap B)\backslash(A\cup X_j)| \\
&= |(A\cup B)\Delta(X_i\cup X_j)|+|(A\cap B)\backslash(X_i\cap X_j)|+|(X_i\cap X_j)\backslash(A\cap B)| \\
&\quad +2\cdot|((A\cap X_j)\backslash(B\cup X_i))\cup((B\cap X_i)\backslash(A\cup X_j))| \\
&= |(A\cup B)\Delta(X_i\cup X_j)|+|(A\cap B)\Delta(X_i\cap X_j)| \\
&\quad +2\cdot|((A\cap X_j)\backslash(B\cup X_i))\cup((B\cap X_i)\backslash(A\cup X_j))| \\
&\geq |(A\cup B)\Delta(X_i\cup X_j)|+|(A\cap B)\Delta(X_i\cap X_j)| \\
&\geq f(A\cup B)+f(A\cap B).
\end{aligned}
$$

On ne pourra pas dire que je ne vous avais pas prévenu. ∎

Corollaire 1 *Soient E un ensemble fini et $P \subseteq \mathcal{P}(E)$. P est close par union et intersection si et seulement s'il existe une fonction sous-modulaire f à valeur réelles positives ou nulles sur $\mathcal{P}(E)$ telle que $P = f^{-1}(0)$.*

On peut noter qu'en changeant le min en un max dans la proposition 1 et en considérant $|(A\cup B)\Delta(X_i\cap X_j)|+|(A\cap B)\Delta(X_i\cup X_j)|$, on montre facilement que la fonction max de ces différences symétriques est sur-modulaire.

On peut facilement construire une famille P close par union et intersection telle que la fonction f de la proposition 1 n'est pas modulaire : considérer $P = \{\emptyset, X, X^c, E\}$ avec $|X| = |X^c| = \frac{|E|}{2}$, $e_1 \in X$, $e_2 \in X^c$ et une paire A, B telle que $A = X\backslash\{e_1\}\cup\{e_2\}$ et $B = X^c\backslash\{e_2\}\cup\{e_1\}$; clairement, $f(A) = f(B) = 2$ (si $|E| \geq 4$) et $f(A\cup B) = f(A\cap B) = 0$.

Pour conclure, il reste donc le problème ouvert (à ma connaissance) suivant : « Quelles sont les familles de parties qui sont la pré-image en 0 d'une fonction modulaire ? ». Toute personne ayant la réponse est cordialement invitée à rédiger « Cadeau bonux 2 : le retour ».