

Sur la largeur arborescente et la largeur arborescente questionnable

Laurent Lyaudet*

6 juin 2025

Résumé

Dans cette note, nous montrons que les classes de graphes de largeur arborescente bornée ont une largeur arborescente questionnable bijective équilibrée bornée.

Version initiale : 2025/06/06 Version courante : 2025/06/06

Mots-clés : principe de première différence, structures binaires, 2-structures, graphes, largeur arborescente, largeur arborescente questionnable, décompositions hiérarchiques

1 Introduction

La largeur arborescente a été introduite dans Robertson and Seymour (1986) et Halin (1976). La largeur arborescente questionnable (bijective) (équilibrée) a été introduite dans Lyaudet (2019). Nous avons montré dans Lyaudet (2019) que si l'on s'autorise des décompositions arborescentes questionnables non bijectives, alors une décomposition arborescente d'un graphe peut être convertie en une décomposition arborescente questionnable non bijective d'à peu près même largeur et même profondeur. Ce résultat associé au théorème de Bodlaender (Bodlaender (1988)) qui fournit une décomposition arborescente de profondeur logarithmique permet d'obtenir une décomposition arborescente questionnable non-bijective équilibrée de largeur bornée. Nous avons posé la question dans Lyaudet (2019) de savoir comment ces deux invariants de graphes se comparent si l'on force la décomposition arborescente questionnable à être bijective. Dans cette note, nous publions notre résultat, obtenu pendant la pandémie de 2020, annoncé aux J.G.A. 2023¹ qui montre que les classes de graphes de largeur arborescente bornée ont une largeur arborescente questionnable bijective équilibrée bornée.

*<https://lyaudet.eu/laurent/>, laurent.lyaudet@gmail.com

1. voir <https://jga2023.sciencesconf.org/> et https://jga2023.sciencesconf.org/data/pages/2_Laurent_Lyaudet.pdf

2 Définitions

Les décomposition/largeur arborescente d'un graphe sont suffisamment connues pour omettre leur définition dans cette note.

Soit un ensemble de sommets V , une (V, k) -suite-d'applications est une suite d'applications (fonctions totales au sens mathématique) de V vers les sommets de structures binaires de cardinalité au plus k (une même structure binaire par application).

Définition 2.1. Soit S une structure binaire. Une (k, α, β) -décomposition arborescente questionnable bijective de S est un triplet (A, ef, en) (A comme arbre, ef comme étiquetage des feuilles et en comme étiquetage des nœuds) :

- A est un arbre binaire enraciné ;
- les feuilles de A sont en bijection, par l'intermédiaire de la fonction ef , avec les sommets de S ;
- ainsi à chaque nœud interne $node$ est associé l'ensemble de sommets de S union des valeurs $ef(f)$ pour toutes les feuilles f sous le nœud $node$, ce qui définit $ef(node)$;
- en est une application ayant pour domaine les nœuds internes de A , telle que $en(node)$ est une $(ef(node), k)$ -suite-d'applications,
- en conséquence, à chaque sommet de S correspond un sous-arbre (qui est un chemin dans le cas bijectif) de A , et puisque l'intersection de deux arbres, resp. chemins, est un arbre, resp. chemin, on a aussi un chemin correspondant à tout couple de sommets (x, y) . On peut ainsi définir la $(\{x, y\}, k)$ -suite-d'applications obtenue en concaténant les $(ef(node), k)$ -suites-d'applications restreintes à $\{x, y\}$, et l'on impose que la première différence entre l'image de x et de y dans cette suite d'applications existe et qu'elle corresponde à deux sommets de même type d'adjacence qu'entre x et y ;
- α est la profondeur de l'arbre A ;
- β est la profondeur de l'arbre étendu A' obtenu en remplaçant chaque nœud interne par un chemin de nœuds (un pour chaque application de la suite associée au nœud original).

k est appelée la largeur de la décomposition ; α est appelée la profondeur structurelle de la décomposition ; β est appelée la profondeur logique de la décomposition.

Lemme 2.2 (7.7 dans Lyaudet (2019)). *If a finite binary structure has a tree-decomposition of width k and depth d , it has a non-bijective $(k + 2, d + 1, d)$ -tree-questionable decomposition.*

Si une structure binaire finie a une décomposition arborescente de largeur k et de profondeur d , elle a une $(k + 2, d + 1, d)$ -décomposition arborescente questionnable non-bijective.

3 Résultat

Lemme 3.1. *Si une structure binaire finie avec p types d'adjacence distincts a une décomposition arborescente binaire de largeur k et de profondeur d , elle a une*

$(2, \leq d \times (k+2) + k, \leq p \times (d \times (k+1) + (k-1)) + d + 1)$ -décomposition arborescente questionnable bijective.

Preuve :

En partant d'une décomposition arborescente binaire enracinée de largeur k , comme chaque sommet x de la structure binaire est associé à un sous-arbre de la décomposition arborescente correspondant aux sacs auxquels il appartient, on peut affecter chaque sommet au nœud $N_{racine}(x)$ de la décomposition arborescente dans ce sous-arbre qui est le plus proche de la racine. Ce nœud $N_{racine}(x)$ est bien unique, ce qui fera que la décomposition arborescente questionnable sera bijective. De plus, comme les sacs contiennent au plus $k+1$ sommets, $|\{y; N_{racine}(y) = N_{racine}(x)\}| \leq k+1$.

Ensuite, à une feuille f de la décomposition arborescente, on fait correspondre un peigne de profondeur k qui ajoute un à un les $k+1$ sommets y tels que $N_{racine}(y) = f$. À un nœud interne binaire n de la décomposition arborescente ayant pour fils n_1 et n_2 , on fait d'abord correspondre un nœud interne de fusion qui connecte les deux peignes venant de n_1 et n_2 , puis on fait correspondre un peigne de profondeur $k+1$ qui ajoute un à un les $k+1$ sommets y tels que $N_{racine}(y) = n$. Donc la profondeur structurelle est $\leq d \times (k+2) + k$.

Sur le premier nœud interne d'un peigne venant d'une feuille, on met une suite d'applications avec une unique application vers une structure binaire de taille 2 qui fixe le type d'adjacence entre les deux premiers sommets pris dans le sac de la feuille. Les deux sommets de S sont envoyés vers les deux sommets de la structure binaire de taille 2. Sinon sur chaque nœud interne d'un peigne, on met une suite d'applications vers au plus p structures binaires de taille 2 pour fixer les types d'adjacence du sommet courant avec la structure binaire construite plus bas dans la décomposition. Dans chacune des p applications, le sommet en cours d'ajout x a même image que les sommets déjà ajoutés qui ont un type d'adjacence avec x différent de celui de la structure binaire de taille 2 en cours ; et les sommets déjà ajoutés qui ont même type d'adjacence avec x que celui de la structure binaire de taille 2 en cours sont envoyés sur l'autre sommet de la structure binaire de taille 2. Enfin, sur chaque nœud interne de fusion, on met une suite d'applications avec une seule application vers une structure binaire de taille 2 avec le type d'adjacence par défaut de la décomposition arborescente (non-adjacent dans le cas standard des graphes); les sommets venant de n_1 sont envoyés vers le premier sommet de la structure binaire de taille 2; tandis que ceux venant de n_2 sont envoyés vers le second sommet de la structure binaire de taille 2. Donc la profondeur logique est $\leq 1 + (k-1) \times p + (k+1) \times d \times p + d = p \times (d \times (k+1) + (k-1)) + d + 1$. ■

À nouveau, de Bodlaender (1988), nous déduisons :

Corollaire 3.2. *Si une classe de structures binaires a une largeur arborescente bornée, elle a une largeur arborescente questionnable bijective équilibrée bornée.*

Références

- H. L. Bodlaender. NC-algorithms for graphs with small treewidth. In J. van Leeuwen, editor, *Graph-Theoretic Concepts in Computer Science, 14th International Workshop, WG '88, Amsterdam, The Netherlands, June 15-17, 1988, Proceedings*, volume 344 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 1–10. Springer, 1988. doi : 10.1007/3-540-50728-0_32. URL https://doi.org/10.1007/3-540-50728-0_32.
- R. Halin. S-functions for graphs. *J Geom*, 8(1) :171–186, 1976. doi : 10.1007/BF01917434. URL <https://doi.org/10.1007/BF01917434>.
- L. Lyaudet. On finite width questionable representations of orders. *CoRR*, abs/1903.02028, 2019. URL <http://arxiv.org/abs/1903.02028>.
- N. Robertson and P. D. Seymour. Graph minors. II. Algorithmic aspects of tree-width. *J. Algorithms*, 7(3) :309–322, 1986. doi : 10.1016/0196-6774(86)90023-4. URL [https://doi.org/10.1016/0196-6774\(86\)90023-4](https://doi.org/10.1016/0196-6774(86)90023-4).